Untersuchungen über Kegelschnitte in solcher Lage, dass jedem von ihnen Dreiecke umgeschrieben werden können, die dem anderen eingeschrieben sind.

INAUGURAL-DISSERTATION,

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei

hochlöblicher philosophischer Facultät zu Marburg

eingereicht

von

August Hahn,
aus Gelnhausen.

Marburg.
Universitäts-Buchdruckerei. (R. Friedrich).
1882.

Seinen lieben Eltern

in Dankbarkeit

gewidmet

vom Verfasser.

Seinen lieben Eltern

Wenn die Gleichungen zweier Kegelschnitte in der allgemeinen Form vorliegen:

$$S \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + \ldots\ldots\ldots a_{33} = 0$$
$$S' \equiv b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + \ldots\ldots\ldots b_{33} = 0$$

und Θ, Θ' die simultanen Invarianten dieses Systems bedeuten, Δ die Discriminante von $S = 0$ ist, also:

$$\Theta = (a_{11}a_{22}b_{33}) + (b_{11}a_{22}a_{33}) + (a_{11}b_{22}a_{33})$$
$$\Theta' = (a_{11}b_{22}b_{33}) + (b_{11}a_{22}b_{33}) + (b_{11}b_{22}a_{33})$$
$$\Delta = (a_{11}a_{22}a_{33})$$

dann drückt bekanntlich (Salmon-Fiedler, Art. 352) die Relation:

$$\Theta^2 = 4\Delta\Theta' \ldots\ldots\ldots (1)$$

geometrisch aus, dass dem einen Kegelschnitt beliebig viele Dreiecke eingeschrieben werden können, welche zugleich dem anderen umgeschrieben sind.

Die Untersuchungen über diesen Gegenstand für zwei spezielle Kegelschnitte scheinen nur die bemerkenswerthen Resultate ergeben zu haben, dass im Falle zweier Kreise mit den Radien r resp. r_1 die Entfernung ihrer Centren:

$$d = \sqrt{r_1^2 \pm 2rr_1}$$

betragen muss (S. F., Art. 352, Aufg. 1), und dass der einem Tangentendreieck der Parabel umgeschriebene Kreis durch den Brennpunkt der Curve geht. (S. F. Art. 235, Aufg. 15).

Im Nachfolgenden habe ich mich mit der Aufgabe beschäftigt, für einige spezielle Kegelschnitte solche Lagen aufzufinden, dass

die einem jeden derselben eingeschriebenen Dreiecke gleichzeitig dem anderen umgeschrieben sind, was analytisch durch die noch zu (1) hinzukommende Relation:

$$\Theta'^2 = 4\,\Delta\,\Theta \ldots\ldots (2),$$

wofern Δ die Discriminante von $S' = 0$ bedeutet, bedingt wird.

Die Möglichkeit einer analytischen Lösung dieses Problems aus den Gleichungen (1) und (2) scheint immer vorhanden zu sein, da man über hinlänglich viele Constanten disponiren kann, ob sich dieselben aber so bestimmen lassen werden, dass die Gleichungen (1) und (2) zugleich durch reelle Werthe derselben erfüllt werden, ist dabei noch gar nicht zu erkennen.

Es werden sich in der That, wie aus den im Folgenden gewonnenen Resultaten erhellt, vielfach die Gleichungen (1) und (2) zwar befriedigende Werthsysteme ergeben, die aber geometrisch unbrauchbar sind.

Wir beschränken uns im Folgenden, weil nur der Kreis in beliebiger Lage zum Axensystem sich analytisch einfach darstellen lässt, auf die Verbindung eines Kreises mit den übrigen Kegelschnitten in ihren einfachsten Formen als Scheitel- und Mittelpunktsgleichungen.

Um die gestellte Aufgabe allgemein zu lösen, verbinden wir die auf den Scheitel bezogene allgemeine Kegelschnittsgleichung:

$$y^2 = 2px + qx^2 \ldots\ldots (1\alpha) \quad \text{mit}$$

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - r^2 = 0 \ldots\ldots (1\beta)$$

als der allgemeinen Gleichung des Kreises.

Aus diesem System von Gleichungen resultiren für (1) und (2) beziehungsweise folgende Ausdrücke:

$$q^2\,[q\,(r^2-\alpha^2-\beta^2) - p\,(2\alpha+p)]^2 = 4p^2\,[q\,(\alpha^2-r^2) - (\beta^2-r^2-2\alpha p)] \ldots (3)$$

$$[q\,(\alpha^2-r^2) - (\beta^2-r^2-2\alpha p)]^2 = -4r^2\,[q\,(r^2-\alpha^2-\beta^2) - p\,(2\alpha+p)] \ldots (4)$$

Diese beiden Gleichungen enthalten die fünf Grössen p, q, α, β, r; wir können also entweder den Kreis fixiren und die den Kegelschnitt bestimmenden Stücke so wählen, dass die Gleichungen (1) und (2) erfüllt sind, oder auch den umgekehrten Gang einschlagen.

Das erste Verfahren, welches auf eine Elimination des p oder q aus (3) und (4) hinauslief, würde augenscheinlich auf weitläufige Resultate führen, wir wollen daher, um zu sehen, wie sich die Sache für eine ganze spezielle Lage gestaltet, α und β gleich Null annehmen.

Unter dieser Voraussetzung fliessen aus (3) und (4) die Gleichungen:

$$qr^2 + p^2 = 2pr \quad \ldots\ldots \quad (5)$$
$$r + rq = 2p \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Die zweite derselben mit r multiplicirt und von der ersten subtrahirt ergiebt:

$$p = r, \text{ wozu}$$
$$q = 1 \text{ gehört.}$$

Da nun Gleichung (1^α) für positives q eine Hyperbel repräsentirt, so müssen »Parameter und Axe derselben gleich dem Radius des Kreises sein«.

Für negatives q, also den Fall der Ellipse, wird:

$$p = r, \quad q = -1, \quad \frac{p}{q} = a = -r;$$

wir sind also auf ein System von Werthen für p und q geführt, das den Gleichungen (5) und (6) Genüge leistet, aber keine geometrische Deutung zulässt. Der spezielle Fall des Kreises führt ebenso auf eine Ungereimtheit.

Schliesslich für $q = 0$, stellt (1^α) eine Parabel dar und es ergiebt sich hierfür aus (5) und (6):

$$p = 2r, \quad r = 2p,$$

welche Gleichungen gleichzeitig nur durch die Annahme $p = r$ befriedigt werden, d. h. »der Parameter der Parabel muss gleich dem Radius des Kreises sein«.

Bei der umgekehrten Annahme, den Kegelschnitt als fest anzusehen und die Lage des Kreises gemäss den Gleichungen (3) und (4) zu bestimmen, liegt es wohl am nächsten, die Grösse r aus denselben zu eliminiren. Eine solche Elimination von r ist aber augenscheinlich schwer durchzuführen und das Resultat derselben würde eine Gleichung zwischen α und β ergeben, die, α und β als variabel angesehen, den geometrischen Ort der Centren aller Kreise repräsentirte, welche die verlangte Eigenschaft besitzen. Dieser Ort ist eine Curve der achten Ordnung, deren Discussion jedoch kein weiteres Interesse bietet.

In der ausgeführt gedachten Endgleichung zwischen α und β kann über eine dieser Grössen, z. B. β, noch beliebig verfügt werden; wir nehmen der Einfachheit halber $\beta = 0$ an, d. h. lassen den Kreismittelpunkt sich auf der X-Axe bewegen und verbinden mit diesem speziell diejenigen Kegelschnitte, welche sich bei der ersten Betrachtung ergeben haben.

Wir gehen zunächst auf die Verbindung der gleichseitigen Hyperbel mit dem Kreis näher ein, rekurriren aber dabei nicht auf Gleichung (3) und (4), sondern nehmen wegen der einfacher sich gestaltenden Rechnung die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel an.

Aus dem System:

$$\left.\begin{aligned} x^2 - y^2 - a^2 &= 0 \\ (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - r^2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

folgen dann für die Bedingungsgleichungen (1) und (2) beziehungsweise die Werthe:

$$(r^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 = 4a^2(\alpha^2 - \beta^2 - a^2) \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

$$(\alpha^2 - \beta^2 - a^2)^2 = -4r^2(r^2 - \alpha^2 - \beta^2) \quad \ldots\ldots (8)$$

Die Elimination von r^2 führt offenbar hierbei auf eine Gleichung zwischen α und β, in welcher diese Grössen bis zu der achten Potenz vorkommen. Der geometrische Ort der Centren aller Kreise bildet daher eine Curve der achten Ordnung, auf deren Gestalt wir nicht näher eingehen.

Wie oben schon angedeutet ist, werde nun für die weiteren Untersuchungen in (7) und (8) $\beta = 0$, dann gehen diese Gleichungen über in:

$$(r^2 - \alpha^2)^2 = 4a^2(\alpha^2 - a^2) \quad \ldots \quad (7\alpha)$$
$$(\alpha^2 - a^2)^2 = -4r^2(r^2 - \alpha^2) \quad \ldots \quad (8\alpha)$$

Hieraus der Einfachheit halber α eliminirt, erhält die Gleichung für r folgende Gestalt:

$$[r \pm a][(r \pm a)^3 - 8a^2 r) = 0,$$

welche die Wurzeln besitzt:

$$r_{\underset{2}{1}} = +a, \quad r_{\underset{4}{3}} = -a$$

$$r_{\underset{6}{5}} = \pm a(2 + \sqrt{5}), \quad r_{\underset{8}{7}} = \pm(2 - \sqrt{5}).$$

Von diesen sind nur $r = +a$, $r = a\ (\pm 2 + \sqrt{5})$ zu gebrauchen, im Folgenden verwenden wir aber nur den Werth $r = +a$, zu welchem das zugehörige: $\alpha = \pm a$ oder $\pm a\sqrt{5}$ wird. Den letzteren Werth von α lassen wir auch unbeachtet und betrachten nur die Lage, welche durch das Werthsystem: $\alpha = \pm a$, $\beta = 0$, $r = a$ bestimmt ist, für welche also »der eine Kegelschnitt durch den Mittelpunkt des anderen geht«.

Für die dem Kreise um- und der Hyperbel eingeschriebenen Dreiecke, welche zuvörderst in Betracht gezogen werden sollen, ist der Nachweis von Interesse, dass in der That, wenn zwei Schnittpunkte von drei Kreistangenten auf der Hyperbel liegen, dies auch von dem dritten gilt.

Zu dem Ende mögen die Gleichungen dreier Kreistangenten (S. F. Art. 132), wofern die Hyperbel auf den Scheitel, der Kreis auf den Mittelpunkt bezogen ist, auf die Form gebracht sein:

$$\left.\begin{aligned} x.\cos\varphi_1 + y.\sin\varphi_1 - a &= 0 \\ x.\cos\varphi_2 + \ldots\ldots\ldots &= 0 \\ r.\cos\varphi_3 + \ldots\ldots\ldots &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (\odot)$$

Hieraus ergeben sich als Coordinaten der Durchschnittspunkte der Tangenten:

$$x_1 = a \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)}, \quad y_1 = a \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)}$$

$$x_2 = \ldots\ldots\ldots, \quad y_2 = \ldots\ldots\ldots$$

$$x_3 = \ldots\ldots\ldots, \quad y_3 = \ldots\ldots\ldots$$

welche, der Reihe nach in die Gleichung der Hyperbel substituirt, die Winkelrelationen liefern:

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 - \cos(\varphi_1+\varphi_2) \ \ldots &= 0 \\ \cos\varphi_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= 0 \\ \cos\varphi_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Wird zur Abkürzung:

$$\cos\varphi_1 = a_1, \quad \cos\varphi_2 = a_2, \quad \cos\varphi_3 = a_3$$

gesetzt, dann nehmen obige Gleichungen leicht die Form an:

$$2(a_1^2 - a_1^2 a_2 + a_1 a_2 - a_1 a_2^2 + a_2^2) = 1$$

$$2(a_2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) = 1$$

$$2(a_3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) = 1$$

Diese Gleichungen der Reihe nach mit:

$(1-a_3)(a_1-a_2)$, $(1-a_1)(a_2-a_3)$, $(1-a_2)(a_3-a_1)$

multiplicirt, geben addirt identisch Null, womit die Richtigkeit der oben ausgesprochenen Behauptung bewiesen ist.

Die Winkelrelationen (9) leisten uns einen guten Dienst, wenn wir nach den geometrischen Oertern der merkwürdigen Punkte der in Rede stehenden Dreiecke fragen.

Zur Bestimmung derselben stellen wir zunächst die Gleichung des einem beliebigen Dreieck umgeschriebenen Kreises auf. Diese lautet (S. F. Art. 157):

$$X_2 \cdot X_3 \cdot \sin A_1 + X_3 \cdot X_1 \cdot \sin A_2 + X_1 \cdot X_2 \sin A_3 = 0,$$

wofern X_1, X_2, X_3 die linken Theile des Systems (⊙), A_1, A_2, A_3 die Winkel bedeuten, welche immer je zwei Tangenten mit einander einschliessen. Die Sinus dieser Winkel werden:

$$\sin A_1 = \sin(\varphi_2 - \varphi_3), \ \sin A_2 = \sin(\varphi_3 - \varphi_1), \ \sin A_3 = \ldots,$$

mithin die Gleichung des Kreises:

$$x^2 \Sigma \cos\varphi_i \cdot \cos\varphi_k \cdot \sin(\varphi_i - \varphi_k) + y^2 \cdot \Sigma \sin\varphi_i \sin\varphi_k \sin(\varphi_i - \varphi_k) +$$
$$+ xy \cdot \Sigma \sin(\varphi_i + \varphi_k) \cdot \sin(\varphi_i - \varphi_k) - ax \Sigma (\cos\varphi_i + \cos\varphi_k) \cdot \sin(\varphi_i - \varphi_k) -$$
$$- ay \cdot \Sigma (\sin\varphi_i + \sin\varphi_k) \sin(\varphi_i - \varphi_k) - a^2 \Sigma \sin(\varphi_i - \varphi_k) = 0 \ldots (10)$$

wobei i, k der Reihe nach durch die Indices 1,2, 2,3, 3,1 zu ersetzen sind. In dieser Gleichung (10) sind, wie man sich leicht unter Hinzuziehung der Relationen (9) überzeugt, die Coefficienten von x^2 und y^2 einander gleich, die von $x.y$ und von x gleich Null. Das Verschwinden des letzteren Coefficienten sagt also geometrisch aus, dass

»die Ordinatenaxe den geometrischen Ort der Centren aller den Dreiecken umgeschriebenen Kreise bildet«.

Demgemäss wird ein speziell ins Auge gefasster Kreis, dessen Mittelpunkt vom Anfangspunkt die Entfernung e haben möge, die Gleichung haben:

$$x^2 + (y - e)^2 - r_1^2 = 0$$

Zwischen den Constanten dieses und des festen Kreises muss aber (S. F. Art. 352, Afg. 1) die Beziehung stattfinden:

$$e^2 = r_1^2 - 2\,a\,r_1,$$

welche mit der Hyperbelgleichung:

$$y^2 = x^2 - 2\,a\,x$$

verglichen, das Resultat erkennen lässt, dass:

»der vierte Schnittpunkt eines beliebigen Kreises (10) mit der Hyperbel gefunden wird, wenn man durch das Centrum desselben eine Parallele zur x-Axe zieht, deren Schnitt mit der Hyperbel eben diesen Punkt liefert«.

Dieser vierte Schnittpunkt steht nun zu dem zugehörigen Höhendurchschnittspunkt des betreffenden Dreiecks in der Beziehung, »dass er demselben diametral gegenüberliegt«.

Dieses folgt daraus, dass die Gleichung des durch drei Hyperbelpunkte gehenden Kreises durch die mit entgegengesetzten Zeichen genommenen Coordinaten des Höhenschnitts befriedigt wird. Unter Zugrundelegung der Asymptotengleichung der Hyperbel:

$$x.y = \frac{a^2}{2}$$

werden drei Hyperbelpunkte vorgestellt durch:

$$x_1, \frac{a^2}{2x_1}; \quad \ldots\ldots\ldots$$

und die Gleichung der Höhen des durch sie bestimmten Dreiecks lauten (S. F. Art. 32, Aufg. 5):

$$(x_1-x_2)x+\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)y+\left(x_3x_2+\frac{a^4}{4x_2x_3}\right)-\left(x_3x_1+\frac{a^4}{4x_3x_1}\right)=0$$

$$(x_2-x_3)x+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0$$

Hieraus ergeben sich für die Coordinaten des Höhenschnitts die Werthe:

$$x=-\frac{a^4}{4x_1x_2x_3}, \quad y=-\frac{2x_1x_2x_3}{a^2} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Ihr Produkt wird $\frac{a^2}{2}$, womit das schon bekannte Resultat bestätigt wird (S. F., Art. 236, Aufg. 1):

»Wenn eine gleichseitige Hyperbel einem Dreieck umgeschrieben ist, so geht sie auch durch den Durchschnittspunkt seiner Höhen«.

Die Gleichung des durch obige drei Hyperbelpunkte gehenden Kreises in Determinantenform (Salmon-Fiedler, Art. 126) wird offenbar folgende:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2, & x, & y, & 1 \\ x_1^2+\frac{a^4}{4x_1^2}, & x_1, & \frac{a^2}{2x_1}, & 1 \\ x_2^2+\frac{a^4}{4x_2^2}, & x_2, & \frac{a^2}{2x_2}, & 1 \\ x_3^2+\frac{a^4}{4x_3^2}, & x_3, & \frac{a^2}{2x_3}, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Schreibt man in dieser Gleichung für x, y beziehungsweise $\frac{a^4}{4x_1x_2x_3}$, $\frac{2x_1x_2x_3}{a^2}$, so ergiebt die Rechnung, dass die Determinante, wie es die oben ausgesprochene Behauptung erfordert, in der That verschwindet.

Da die Coordinaten eines beliebigen Centrums M von einem umgeschriebenen Kreis sowie die des zugehörigen Höhenschnitts H von derselben Grösse e abhängig gemacht sind, so können wir auch bequem zu dem geometrischen Ort der Schwerpunkte S und der Centren F der Feuerbach'schen Kreise gelangen, unter Benutzung der bekannten Beziehung, dass vier solche zusammengehörige Punkte M, S, F, H auf einer Geraden liegen und zwar so, dass die Strecke MF innen in S, aussen in H nach dem Verhältniss 2 getheilt wird.

Hiernach ergeben sich als Coordinaten eines bestimmten Schwerpunkts:

$$x = \frac{\sqrt{a^2 + e^2} - a}{3}, \quad y = \frac{e}{3}$$

Durch Elimination von e resultirt hieraus die Gleichung für den Ort des Schwerpunkts, nämlich:

$$y^2 = x^2 + \frac{2}{3} a . x, \quad \text{d. h.}$$

»Der Schwerpunkt beschreibt eine auf den Scheitel bezogene gleichseitige Hyperbel mit der Axe $\frac{a}{3}$«.

Aehnlich bestimmen sich die Coordinaten für das Centrum des Feuerbach'schen Kreises:

$$x = \frac{\sqrt{a^2 + e^2} - a}{2}, \quad y = 0 \quad \text{d. h.}$$

»Die Centren der Feuerbach'schen Kreise liegen sämmtlich auf der x-Axe«.

Unter den unzählig vielen Dreiecken, auf welche wir im Vorhergehenden näher eingegangen sind, befindet sich eine Schaar, welche die merkwürdige Eigenschaft hat, zwei imaginäre Eckpunkte und einen reellen zu besitzen.

Denkt man sich nämlich die in Betracht gezogenen Dreiecke dadurch entstanden, dass man eine Tangente um den Kreis sich herumbewegen lässt, die jedesmaligen Schnittpunkte derselben mit der Hyperbel bestimmt und von diesen aus die

Tangenten an den Kreis legt, deren Schnitt die dritte Ecke des betreffenden Dreiecks bildet, dann werden offenbar die Schnittpunkte der beweglich gedachten Tangente und damit zwei Eckpunkte des Dreiecks imaginär, wenn sich die mit der y-Axe zusammenfallende Kreistangente in beiderlei Sinn so lange fortrückt, bis sie den Asymptoten parallel wird.

Die zugehörigen dritten Eckpunkte sind dabei reell und durchlaufen den vom Kreise eingeschlossenen Hyperbelbogen; ebenso bleiben die merkwürdigen Punkte dieser Dreiecke reell.

Wir weisen dies speziell für die Kreistangente $x = a$ nach, welche mit der Hyperbel die Schnittpunkte:

$$x_1 = a,\ y_1 = ai;\ x_2 = a,\ y_2 = -ai\ (i = \sqrt{-1})$$

erzeugt. Die Gleichungen der von ihnen aus möglichen Kreistangenten werden:

$$\left.\begin{aligned} x + iy &= 0 \\ x - iy &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Ihr Schnittpunkt: $x = 0$, $y = 0$ ist in der That reell und liegt auf der Hyperbel. Die drei Eckpunkte dieses Dreiecks mit zwei imaginären Ecken haben also die Coordinaten:

$$x_1 = a,\ y_1 = ai;\ x_2 = a;\ y_2 = -ai;\ x_3 = 0,\ y_3 = 0,$$

daher die Gleichungen zweier Höhen:

$$\left.\begin{aligned} x - iy - 2a &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

und die reellen Coordinaten des Höhenschnitts:

$$x = 2a,\ y = 0,$$

welche der Gleichung der Hyperbel, des Höhenortes, genügen.

Die Coordinaten der übrigen merkwürdigen Punkte würden ebenso reell ausfallen.

Es ist unmittelbar klar, dass diese speziell durchgeführte Betrachtung auch für die anderen Kreistangenten, welche die Hyperbel in imaginären Punkten treffen, gilt.

Wir untersuchen nun die der Hyperbel umgeschriebenen und dem Kreis eingeschriebenen Dreiecke.

Für diese sei auch zunächst der Nachweis geführt, dass der dritte Schnittpunkt dreier Hyperbeltangenten wirklich auf dem Kreise liegt, wenn die beiden anderen auf demselben liegen. Wird zum Beweise die Hyperbel auf den Mittelpunkt, der Kreis auf den Scheitel bezogen, so nehmen durch die Substitution $x = a \,.\, sec \,.\, \psi$, $y = a \,.\, tang\, \psi$ drei Hyperbeltangenten die Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} x \,.\, sec \,.\, \psi_1 - y \,.\, tang\, \psi_1 - a &= 0 \\ x \,.\, sec \,.\, \psi_2 - \ldots\ldots\ldots &= 0 \\ x \,.\, sec \,.\, \psi_3 - \ldots\ldots\ldots &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Aus diesem System fliessen für die Coordinaten der Schnittpunkte die Werthe:

$$x_1 = a\, \frac{cos\, \frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_2)}{cos\, \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2)}, \quad y_1 = -a \,.\, \frac{sin\, \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2)}{cos\, \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2)},$$

$$x_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad y_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad y_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

welche der Reihe nach in die Kreisgleichung substituirt, zu den Relationen führen:

$$\left.\begin{aligned} cos\, \psi_1 + cos\, \psi_2 - sin\, \psi_1 \,.\, sin\, \psi_2 - 1 &= 0 \\ cos\, \psi_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= 0 \\ cos\, \psi_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ (12)$$

Diese Gleichungen durch die Substitution:

$$cos\, \psi_1 = \frac{1}{\mathfrak{Cof.}\, \varphi_1}\ ^*) \quad sin\, \psi_1 = \frac{\mathfrak{Sin.}\, \varphi_1}{\mathfrak{Cof.}\, \varphi_1}$$

in Hyperbelfunctionen ausgedrückt, werden:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Cof.}\, \varphi_1 + \mathfrak{Cof.}\, \varphi_2 - \mathfrak{Cof.}\, (\varphi_1 + \varphi_2) &= 0 \\ \mathfrak{Cof.}\, \varphi_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots &= 0 \\ \mathfrak{Cof.}\, \varphi_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots &= 0 \end{aligned}\right\}$$

stimmen also in dieser Form genau mit denen von (9) überein. Der Beweis, dass die dritte Gleichung eine Folge der beiden ersten, ist deshalb dem in (9) ganz analog.

---

*) Mit $\mathfrak{Cof.}$ etc. werde der Cos. hyperbol. etc. bezeichnet.

Zu den geometrischen Oertern der merkwürdigen Punkte dieser Dreiecke verhilft uns die bei (S. F. Art. 351, Aufg. 6) gelöste Aufgabe, nach welcher die Gleichung des Ortes vom Höhendurchschnittspunkt eines Dreiecks, welches einem Kegelschnitt eingeschrieben und zugleich einem anderen umgeschrieben ist, folgende Gestalt hat:

$$(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)(a_1^2 + b_1^2) = a_1^2 \cdot b_1^2 S$$

Für den vorliegenden Fall hierin

$$a = a,\ b = ai,\ a_1 = b_1 = a,$$

$$S = \frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - 1$$

gesetzt, ergiebt als Gleichung des gesuchten Orts:

$$(x+a)^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

»Derselbe ist also ein Kreis, dessen Radius gleich dem des gegebenen Kreises ist und der eine zu diesem symmetrische Lage besitzt«.

Vermittelst dieses Höhenortes sind wir nach dem früher Angeführten in den Stand gesetzt, leicht den Ort des Schwerpunkts sowie den vom Centrum des Feuerbach'schen Kreises aufzufinden. Diese müssen nach dem bekannten Kreissecantensatz der Elementargeometrie Kreise sein, welche man erhält, wenn sämmtliche Verbindungsstrecken des Punktes $(x = a, y = 0)$ von den Punkten obigen Kreises beziehungsweise gedrittelt und halbirt werden. Es ergiebt sich auf diese Weise, dass:

»die Centren der Feuerbach'schen Kreise einen um den Anfangspunkt beschriebenen Kreis mit dem Radius $\frac{a}{2}$ bilden und, dass das Centrum des Schwerpunktkreises, dessen Radius $= \frac{a}{3}$, in der Entfernung $\frac{a}{3}$ vom Coordinatenanfangspunkt liegt.«

Von diesen geometrischen Oertern bietet der Höhenortskreis noch deshalb ein besonderes Interesse, weil er zu der gegebenen Hyperbel in derselben Beziehung steht wie der ge-

gebene Kreis. Da aber die Hyperbel selbst als der geometrische Ort der Höhenschnitte von den zuerst behandelten Dreiecken erscheint, so kann man sagen:

»Die geometrischen Oerter der Höhenschnitte für die beiden Schaaren von Dreiecken bilden mit einander ein neues System von Kegelschnitten, welches die geforderte Lage besitzt«.

Zum Schlusse der Untersuchung über die zweite Art von Dreiecken wollen wir noch auf die unter ihnen vorkommenden Dreiecke mit zwei imaginären Eckpunkten kurz eingehen, für welche genau das Entsprechende gilt wie für die im ersten Theil betrachteten Dreiecke derselben Art. Ihre dritten reellen Ecken durchlaufen also den von der Hyperbel eingeschlossenen Kreisbogen, und die ihnen angehörigen merkwürdigen Punkte sind ebenfalls reell.

Es sei dies, ganz analog wie früher verfahrend, nur für das durch die spezielle Lage der Hyperbeltangente: $x = -a$ bestimmte Dreieck mit zwei imaginären Ecken nachgewiesen.

Die Coordinaten der Schnittpunkte dieser Hyperbeltangente mit dem Kreis werden:

$$x_1 = -a, \quad y_1 = a i\sqrt{3}\,; \quad x_2 = -a, \quad y_2 = -a i\sqrt{3}\,,$$

und die Gleichungen der von diesen Punkten aus an die Hyperbel möglichen Tangenten:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2} a x + \tfrac{1}{2} a i\sqrt{3}\,.\,y - a^2 = 0 \\ \tfrac{1}{2} a x - \tfrac{1}{2} a i\sqrt{3}\,.\,y - a^2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

Hieraus erhält man für die Coordinaten der Schnittpunkte: $x = 2a$, $y = 0$, welche in der That die Kreisgleichung befriedigen.

Aus den Coordinaten der Ecken des in Rede stehenden Dreiecks ergeben sich als Gleichungen der Höhen:

$$\left.\begin{aligned} 3x - i\sqrt{3}\,.\,y + 6a = 0 \\ y = 0 \end{aligned}\right\}$$

woraus die reellen Coordinaten des Höhenschnitts resultiren: $x = -2a$, $y = 0$, welche augenscheinlich der Gleichung des Höhenorts Genüge leisten.

Die Realität der anderen merkwürdigen Punkte lässt sich ebenso analytisch beweisen, leuchtet aber ohne Weiteres ein.

Wir wenden uns nunmehr zu dem zweiten Theil unserer Aufgabe, zu der Verbindung der auf den Scheitel bezogenen Gleichung der Parabel mit der allgemeinen Kreisgleichung.

Die Relationen (1) und (2) gewinnen wir hierfür aus den Gleichungen (3) und (4), darin $q = 0$ und bequemerer Rechnung halber $p = 2 . m$ setzend, nämlich:

$$(\alpha - m)^2 = r^2 - \beta^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

$$(\beta^2 - 4m\alpha - r^2)^2 = -16mr^2(\alpha + m) \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Aus diesen beiden Gleichungen r eliminirt, giebt:

$$\alpha^4 - 12\alpha^3 m + 22\alpha^2 m^2 + 20\alpha m^3 - 16\alpha\beta^2 m - 16m^2\beta^2 - 15m^4 = 0 \quad (15)$$

d. h. »der geometrische Ort der Centren aller Kreise, welche die Aufgabe lösen, ist eine Curve der vierten Ordnung«.

Gemäss der in der Einleitung gemachten Bemerkung, nehmen wir β gleich Null an und erhalten dadurch aus Gleichung (15) folgende:

$$[\alpha + m]^4 - 16[\alpha - m]^2[\alpha + m] = 0,$$

welcher die Wurzeln:

$$\alpha_1 = -m, \quad \alpha_2 = 3m, \quad \alpha_{3,4} = m(5 \pm 2\sqrt{5})$$

zukommen, und zu denen die zugehörigen Werthe von r beziehungsweise:

$$r_{1,2} = \pm 2m, \quad r_{3,4} = 2m(2 \pm \sqrt{5})$$

sind. Von diesen Werthen sind geometrisch nur $r_1 = 2m$, $r_3 = 2m(2 + \sqrt{5})$ zu verwenden, wir gehen jedoch im

Folgenden nur auf diejenige Lage der beiden Kegelschnitte ein, welche durch das System der Werthe $\alpha = -m$, $\beta = 0$, $r = 2m$ bedingt ist.

Zu den Winkelrelationen, welche geometrisch aussagen, dass die drei Schnittpunkte von drei Parabeltangenten (Dreiecksseiten) auf dem Kreise liegen, gelangt man am bequemsten, wenn man die Bedingung aufsucht, unter welcher die durch drei Kreispunkte bestimmten Secanten Tangenten an die Parabel werden. Es ergeben sich auf diese Weise, indem dabei die Gleichung des Kreises auf den Mittelpunkt bezogen wird, genau dieselben Gleichungen wie in (9), auf welche wir deshalb verweisen.

Hieran schliessen wir noch einen Beweis für den bereits bekannten Satz, dass:

»der einem Tangentendreieck der Parabel umgeschriebene Kreis durch den Brennpunkt der Curve geht«. (Art. 235, Aufg. 15).

Die Gleichung eines beliebigen Kreises ist:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - r^2 = 0,$$

welche zufolge der Relation (13) die Gestalt annimmt:

$$x^2 - 2\alpha x + y^2 - 2\beta y + 2\alpha m - m^2 = 0$$

und wie es der obige Satz verlangt, durch die Coordinaten des Brennpunkts: $x = m$, $y = 0$ befriedigt wird.

»Der geometrische Ort der Höhenschnitte der in Untersuchung stehenden Dreiecke, ist die Directrix der Parabel« (S. F., Art. 235, Aufg. 3), also hier die y-Axe, und, da ferner das Centrum des umgeschriebenen Kreises stets im Coordinatenanfangspunkt bleibt, so bewegen sich auch die

»Schwerpunkte und die Centren der Feuerbach'schen Kreise von den betreffenden Dreiecken auf der Ordinatenaxe«.

Eine Anzahl dieser reellen merkwürdigen Punkte gehöret auch Dreiecken mit zwei imaginären Eckpunkten an. Kommt nämlich ein beliebiges dieser Dreiecke dadurch zu Stand, dass man von irgend einem Punkt des Kreises zwei Tangenten an

die Parabel construirt und ihre Schnittpunkte mit dem Kreis, welche die dritte Seite des betreffenden Dreiecks bestimmen, aufsucht, dann werden die beiden ersten Tangenten von allen den Punkten aus imaginär ausfallen, welche auf dem von der Parabel eingeschlossenen Kreisbogen liegen.

Da dies sowie die Realität der merkwürdigen Punkte unmittelbar evident ist, so übergehen wir den analytischen Beweis hiervon, und untersuchen nun die von drei Kreistangenten gebildeten Dreiecke, deren Ecken auf der Parabel gelegen sind.

Hierbei ist es vortheilhafter, den Kreis auf den Mittelpunkt zu beziehen, die Gleichungen der beiden Kegelschnitte also in der Form vorauszusetzen:

$$x^2 + y^2 - 4m^2 = 0$$
$$y^2 - 4m\,(x - m) = 0,$$

besonders deshalb, weil wir die bekannten Winkelbeziehungen nöthig haben und diese sich hierdurch analog dem Früheren leicht ableiten lassen. Durch die Substitution der im ersten Theil angegebenen Coordinaten für die Durchschnittspunkte dreier Kreistangenten in die Gleichung der Parabel ergeben sich nämlich sofort die Relationen:

$$\left.\begin{array}{l} 1 + \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 - \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 = 0 \\ 1 + \sin\varphi_2 \cdot \sin\varphi_3 \ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \\ 1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \end{array}\right\} \quad (16)$$

von denen der dritte, wie man sich durch Rechnung überzeugt, als eine Folge der beiden ersten erscheint. Vermittelst dieses Systems (16) lässt sich nun nachweisen, dass

»der einem von drei Kreistangenten gebildeten Dreieck umgeschriebene Kreis ebenfalls durch den Brennpunkt der Parabel geht«.

Die Gleichung eines solchen Kreises ist nach Früherem (vgl. Gl. (10)):

$$X_1 \cdot X_2 \sin A_3 + X_2 X_3 \sin A_1 + X_3 X_2 \sin A_1 = 0$$

In den linken Theil zunächst die Coordinaten des Brennpunkts: $x = 2m$, $y = 0$ eingesetzt, giebt:

$(\cos\varphi_1 - 1)(\cos\varphi_2 - 1).\sin(\varphi_1 - \varphi_2) + (\cos\varphi_2 - 1)(\ldots) + \ldots\ldots$

oder ausgeführt:

$$[\cos\varphi_1 . \cos\varphi_2 - (\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) + 1]\sin(\varphi_1 - \varphi_2) +$$
$$+[\ . \ . \ . \ . \ . \ . : . \ . \ . \ . \ . \ . \ ] \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$
$$+[\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ ] \ . \ . \ . \ . \ .$$

Hierin die aus (16) gezogenen Werthe für: $\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2$ u. s. w. eingeführt, ertheilen obigem Ausdruck den Werth Null, womit der gewünschte Nachweis geführt ist.

Bezeichnen ferner ξ, η die Mittelpunktscoordinaten irgend eines solchen umgeschriebenen Kreises mit dem Radius r_1, so bestehen, wofern d die Entfernung seines Centrums von dem gegebenen Kreis bedeutet, folgende drei Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} &\xi^2 + \eta^2 = d^2 \\ &(\xi - m)^2 + \eta^2 - r_1^2 = 0 \\ &r_1^2 - 4mr_1 = d^2 \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Durch Subtraction der ersten und dritten Gleichung und Substitution des daraus sich ergebenden Werthes für η^2 in die zweite, folgt:

$$r_1 = \xi - m \quad \text{d. h.}$$

»Der Radius eines beliebigen umgeschriebenen Kreises ist gleich der Abscisse seines Centrums weniger dem vierten Theile des Parameters der Parabel«.

Um den geometrischen Ort der Centren dieser umgeschriebenen Kreise zu finden, setze man den eben gefundenen Werth von r_1 in die zweite Gleichung des Systems (17) ein. Hierdurch resultirt die von r_1 freie Gleichung zwischen ξ und η:

$$\eta^2 = 2m\xi - 3m^2 \quad \ldots \quad (17a)$$

welche also den Satz repräsentirt:

»Der geometrische Ort der Centren aller Kreise, welche den dem Kreise um-, der Parabel eingeschriebenen Dreiecke umgeschrieben sind, ist eine Parabel«.

Ihre Axe fällt mit der Abscissenaxe zusammen, ihr Scheitel liegt in der Entfernung $\frac{3}{2}m$ vom Anfangspunkt und der Parameter derselben beträgt $2m$.

Auf den geometrischen Ort der Höhenschnitte gehen wir nicht näher ein, weil derselbe mit dem entsprechenden Orte für die erste Schaar von Dreiecken, der Directrix, keine interessanten Beziehungen eingeht.

Ebenso lassen wir den Ort des Schwerpunkts und vom Centrum des Feuerbach'schen Kreises unberücksichtigt.

Gegenstand näherer Untersuchung mögen noch die mit zwei imaginären Eckpunkten versehenen Dreiecke bilden.

Die Entstehungsweise eines beliebigen den Kreis um- und der Parabel eingeschriebenen Dreiecks analog der für ein Dreieck von der umgekehrten Beschaffenheit voraussetzend, lässt sofort erkennen, dass von jenen Dreiecken diejenigen zwei imaginäre Ecken erhalten, welche durch die Punkte des vom Kreise begrenzten Parabelbogens bestimmt sind.

Die jedesmaligen dritten Seiten (Tangenten) dieser Dreiecke sowie die Centren der zugehörigen umgeschriebenen Kreise sind dabei reell.

Wie früher, sei auch hier dies nur für den Punkt: $x = m$, $y = 0$, also den Scheitel der Parabel, nachgewiesen.

Die von ihm aus an den Kreis als construirbar gedachten Tangenten werden durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 2x - i.y - 2m &= 0 \\ 2x + i.y - 2m &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

vorgestellt, aus welchen in Verbindung mit der Gleichung der Parabel für die Coordinaten der Schnittpunkte dieser zwei Tangenten mit der letzteren Curve, die Werthe fliessen:

$$x_{1,2} = -2m, \quad y_{1,2} = \pm 2mi\sqrt{3}.$$

Die Gleichung der diese Punkte verbindenden Geraden, die dritte Kreistangente, lautet:

$$x + 2m = 0.$$

Sie ist also reell und verläuft im Abstand $-2m$ vom Anfangspunkt parallel der Ordinatenaxe.

Durch die Coordinaten der Ecken des speziell angenommenen Dreiecks, drücken sich die Gleichungen der in den Mitten zweier seiner Seiten errichteten Perpendikel folgendermassen aus:

$$\left.\begin{array}{c} 3x + 2i\sqrt{3}\,.\,y - \frac{9}{2}m = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\}$$

Die Coordinaten vom Centrum des entsprechenden umgeschriebenen Kreises sind also: $x = \frac{3}{2}m$, $y = 0$ und genügen der Gleichung (17^a).

Aus diesen Resultaten folgt ohne Weiteres, dass, während die Punkte des erwähnten Parabelbogens beschrieben werden, die dritte der durch sie gegebenen Kreistangenten, sich von der Lage: $x = -2m$ in beiderlei Sinn um den Kreis herumbewegt, bis sie die Parabel berührt, und ferner, dass die zugehörigen Centren der diesen Dreiecken umgeschriebenen Kreise auf denjenigen Bogen der Parabel (17^a) liegen, welcher sich innerhalb des gegebenen Kreises befindet.

Wie sich aus den an die Gleichungen (5) und (6) geknüpften Untersuchungen ergab, führte die Combination eines um den Anfangspunkt beschriebenen Kreises mit der auf den Scheitel bezogenen Ellipse (resp. Kreis) auf Ungereimtheiten. Selbst bei Voraussetzung einer beliebigen Lage des Kreises erhält man in Verbindung desselben mit der Ellipse keine greifbaren Resultate, wohl aber mit dem Kreis. Aus diesem Grunde beschränken wir uns auf den letzteren Fall, und nehmen die Gleichungen der beiden Kreise in der Form an:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - r^2 &= 0 \\ (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - r_1^2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Für dieses System die Relationen (1) und (2) gebildet, giebt beziehungsweise:

$$\alpha^2 + \beta^2 = d^2 = r^2 \pm 2 r r_1$$
$$\alpha^2 + \beta^2 = d^2 = r_1^2 \pm 2 r_1 r.$$

Durch Subtraction folgt hieraus:

$$r_1 = r, \text{ wozu:}$$
$$d = \pm r\sqrt{3} \text{ oder } \pm r\sqrt{-1} \text{ gehört.}$$

Wir haben also hier nur zwei reelle Werthsysteme von d und r, welche (1) und (2) gleichzeitig erfüllen, deren Betrachtung jedoch in eine zusammenfällt. Die beiden Arten von ein- und umgeschriebenen Dreiecken sind hierbei congruent und unterscheiden sich nur durch ihre verschiedene Lage.

»Der geometrische Ort der Centren aller Kreise, welche die Aufgabe lösen, ist offenbar ein um den Anfangspunkt beschriebener Kreis mit dem Halbmesser: $r\sqrt{3}$«.

Dies folgt leicht analytisch, indem die Elimination von r_1 aus den für (1) und (2) erhaltenen Ausdrücken als Gleichung des gesuchten Ortes:

$$\alpha^2 + \beta^2 - 3r^2 = 0 \text{ ergiebt.}$$

Unbeschadet der Allgemeinheit kann β im Folgenden gleich Null angenommen werden.

Die bekannten Winkelrelationen, welche der Vollständigkeit halber angeführt sein mögen, werden:

$$2 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \sqrt{3}\,(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) = 0$$
$$2 + \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$
$$2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

Die Rechnung ergiebt, dass auch hier die dritte Gleichung eine Folge der beiden ersten ist.

Wir bestimmen nun die geometrischen Oerter der merkwürdigen Punkte dieser Dreiecke und zwar zunächst derjenigen,

welche dem auf den Mittelpunkt bezogenen Kreis (K) um-, dem anderen (K_1) eingeschrieben sind.

Die Gleichung für den Ort der Höhenschnitte ist (nach S. F., Art. 351, Aufg. 6):

$$(x + r\sqrt{3})^2 + y^2 - 9r^2 = 0 \quad \text{d. h.}$$

»Der gesuchte Ort ist ein Kreis von dem Radius $3r$, dessen Centrum in der Entfernung $-r\sqrt{3}$ vom Anfangspunkt liegt«.

Ganz analog wie für die der Hyperbel um- und dem Kreis eingeschriebenen Dreiecke finden wir auch hier den Ort des Schwerpunkts und des Centrums vom Feuerbach'schen Kreis. Die Gleichungen dieser Ortskreise werden beziehungsweise:

$$\left(x - \frac{r\sqrt{3}}{3}\right)^2 + y^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - \left(\frac{3r}{2}\right)^2 = 0,$$

woraus sich die Lage der Oerter leicht ersehen lässt.

Werden die in Betracht gezogenen Dreiecke auf dieselbe Weise entstanden gedacht, wie die bei der Parabel und dem Kreis auftretenden Dreiecken, so erscheinen unter jenen diejenigen mit zwei imaginären Eckpunkten, welche durch die Punkte des vom Kreise (K) eingeschlossenen Bogens des Kreises (K_1) bestimmt sind.

Die Realität der dritten Seiten dieser Dreiecke sowie ihrer merkwürdigen Punkte gilt ebenfalls.

Fassen wir auch hier speziell den Punkt: $x = r(\sqrt{3} - 1)$, $y = 0$ ins Auge — das Analoge besteht für alle Punkte des Bogens —, so sind die Gleichungen der von ihm aus möglichen Kreistangenten:

$$x - y\sqrt{3 - 2\sqrt{3}} - r(\sqrt{3} - 1) = 0$$

$$x + y\sqrt{3 - 2\sqrt{3}} - r(\sqrt{3} - 1) = 0$$

Ihre Schnittpunkte mit dem Kreis (K_1) haben die Coordinaten:

$$x_{1,2} = -r, \quad y_{1,2} = \pm r \cdot \frac{\sqrt{3-2\sqrt{3}}}{2-\sqrt{3}},$$

mithin ist die Gleichung der dritten Tangente: $x = -r$.

Die Gleichungen der Höhen dieses speziellen Dreiecks liefern für die Coordinaten des Höhenschnitts die Werthe:

$$x = -r(3+\sqrt{3}), \quad y = 0,$$

welche in der That der Gleichung des Höhenschnittkreises genügen.

Dass die übrigen merkwürdigen Punkte gleichfalls reell, leuchtet ein.

Für das andere System von Dreiecken, welche dem Kreis (K_1) um-, dem Kreis (K) eingeschrieben sind, bleiben wie schon erwähnt, dieselben Ergebnisse bestehen.

Die Gleichungen für den Ort des Höhenschnitts, des Schwerpunkts und des Centrums vom Feuerbach'schen werden also beziehungsweise:

$$(x-2r\sqrt{3})^2 + y^2 - 9r^2 = 0$$

$$\left(x - \frac{4r\sqrt{3}}{3}\right)^2 + y^2 - r^2 = 0$$

$$(x - r\sqrt{3})^2 + y^2 - \left(\frac{3r}{2}\right)^2 = 0$$

Die erste und dritte dieser Gleichungen mit den entsprechenden Gleichungen im ersten Theil verglichen, führt zu dem Resultat:

»Dass die beiden Höhenschnittskreise und die durch die Centren der Feuerbach'schen erzeugten Kreise dieselbe Radicalaxe: $x = \frac{3r}{2\sqrt{3}}$ haben, wie die gegebenen Kreise«.

Eine interessante Beziehung gehen die zwei Ortskreise für die Begegnungspunkte der Höhen mit einander ein. Da die Entfernung ihrer Centren nämlich: $3r\sqrt{3}$ beträgt, so können:

»jedem dieser Kreise beliebig viele Dreiecke eingeschrieben werden, die dem anderen umgeschrieben sind«.

Man wird also hiermit auf ein System von unzählig vielen Kreisen geführt, welche die gestellte Aufgabe lösen.

Bei den im Vorhergehenden betrachteten drei Fällen sind wir nur auf die Lagen der beiden Kegelschnitte, welche durch das erste den Gleichungen (1) und (2) Genüge leistendes Werthsystem bestimmt war, näher eingegangen, weil sich dasselbe wegen seiner Einfachheit vorzugsweise eignete, um weitere Untersuchungen durchführen zu können.

Diese ersten benutzten Werthsysteme haben noch die besondere Eigenschaft, dass sie jedesmal die Determinanten Θ und Θ' auf Null reduciren, d. h. aber geometrisch (S. F., Art. 351):

»Ein in Bezug auf jeden der beiden Kegelschnitte sich selbst conjugirtes Dreieck ist dem anderen eingeschrieben«, oder

»Jeder der Kegelschnitte geht durch ein System harmonischer Pole, welches auf den anderen bezogen ist«.

Auf die Lage dieser sich selbst conjugirten Dreiecke und der harmonischen Pole noch näher einzugehen, würde jedoch den Zweck vorliegender Arbeit übersteigen«.

Curriculum vitae.

Ich, August Hahn, Sohn des Postdirektor Hahn in Gelnhausen, wurde ebendaselbst geboren am 11. Mai 1860. Die erste Schulbildung genoss ich an einer Privatschule meiner Vaterstadt, welche unter der Leitung des Herrn Rektor Winneberger stand. Ostern 1873 trat ich in die Quarta des Gymnasiums zu Büdingen ein, an welcher Anstalt ich am 21. März 1879 das Maturitätsexamen bestand. Im Sommersemester desselben Jahres bezog ich die Universität Marburg, um mich dem Studium der Mathematik und Naturwissenschaften zu widmen. Hier verweilte ich bis zum Schlusse des Wintersemesters 1882, wo ich meine Studien beendigte. Während meines Studiums hörte ich die Vorlesungen der Herren Professoren: **Bergmann, von Drach, Dunker, Greeff, Hess, Klocke, Melde, Stegmann, Wigand.** Allen diesen meinen hochzuverehrenden Herren Lehrern spreche ich hiermit meinen wärmsten Dank aus.